Tronc commun Sciences BIOF

Correction de la série N°4 : Arithmétique dans IN

Exercice1(*) **:** VRAI ou FAUX ?

♣ Si un nombre est divisible par 2 alors il est aussi divisible par 6.
♣ Si un nombre est divisible par 6 alors il est aussi divisible par 2.
♣ Un nombre est divisible par 5 et par 2 est nécessairement divisible par 10.
♣ Un nombre est divisible par 9 et par 4 est nécessairement divisible par 6.
♣ Le nombre 11111111123 est divisible par 3

Correction : ♣ Si un nombre qui est divisible par 2 alors il est aussi divisible par 6. FAUX
Par exemple : 4 est divisible par 2 mais 4 n'est pas divisible par 6
♣ Si un nombre qui est divisible par 6 alors il est aussi divisible par 2. VRAI
En effet : si n est divisible par 6 donc : $n=6k=2\times 3k=2k'$
Par suite : n est aussi divisible par 2
♣ Un nombre qui est divisible par 5 et par 2 est nécessairement divisible par 10. VRAI
♣ Un nombre qui est divisible par 9 et par 4 est nécessairement divisible par 6. VRAI

Exercice2: (*) Déterminer les chiffre x et y pour que :

1) Le nombre : $M=95x2x31x$ soit divisible par 3 et aussi un nombre impair.(Déterminer tous les nombres possibles)
2) Le nombre : $N=12x34y6$ soit multiple de 4 et de 9 (Déterminer tous les nombres possibles)

Correction : 1) On a : $0\leq x\leq 9$. Le nombre : $M=95x2x31x$ est impair donc : $x\in\{1;3;5;7;9\}$
Le nombre : M est divisible par 3 équivaut à : $9+5+x+2+x+3+1+x=3k$; $k\in\mathbb{N}$
C'est-à-dire : $20+3x$ un multiple de 3
En donnant à x les valeurs $1;3;5;7;9$: On trouve que : $x=3$ (seul vérifie).
Par suite le nombre est : 95525315.
2) On a : $x\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ et $y\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$
Le nombre : $N=12x34y6$ est multiple de : 4
Signifie que : le nombre $y6$ est un multiple de 4.
Donc : $y\in\{1;3;5;7;9\}$.
Le nombre : $N=12x34y6$ est multiple de : 9
Signifie : $1+2+x+3+4+y+6=16+x+y$ est un multiple de 9
Si $y=1$ alors $x=1$ et $16+x+y=18$
Si $y=3$ alors $x=8$ et $16+x+y=27$.
Si $y=5$ alors $x=6$ et $16+x+y=27$
Si $y=7$ alors $x=4$ et $16+x+y=27$
Si $y=9$ alors $x=2$ et $16+x+y=27$
D'où les couples $(x;y)$ solutions sont : $(1;1);(8;3);(6;5);(4;7);(2;9)$.
Par suite les nombres possibles sont :
1213416 ; 1283436; 1263456; 1243476; 1223496

Exercice3 : (*) 1) Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants et préciser quand il s'agit d'un nombre premier : 104 ; 3196 ; 1156 ; 863 et 189.
2) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 3196 et 1156
3) Quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 104 pour obtenir un carré parfait ?
4) Rendre la fraction $\frac{3196}{1156}$ irréductible
5) Calculer $\frac{41}{3196}+\frac{21}{1156}$

Correction : 1) a) $104 = 2\times52 = 2\times3\times26 = 2\times2\times2\times13 = 2^3\times13$

b) $3196 = 2\times1598 = 2\times2\times799 = 2\times2\times17\times47 = 2^2\times17\times47$

c) $1156 = 2\times578 = 2\times2\times289 = 2\times2\times17\times17 = 2^2\times17^2$

d) 863 Est un nombre premier en effet :

• On détermine tous les nombres premiers p vérifiant $p^2 \le 863$.

Les nombres sont : 2 ;3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ;29

• 863 n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors il est premier

e) $189 = 3\times63 = 3\times3\times21 = 3\times3\times3\times7 = 2^3\times7$

2) Déduction du : PGCD et du PPMC des nombres 3196 et 1156 :

$3196 = 2^2\times17\times47$ et $1156 = 2^2\times17^2$

On fait le produit des facteurs premiers apparaissant dans les deux décompositions, affectés de leur plus petit exposant donc : $PGCD(3196;1156) = 2^2\times17 = 68$

Il y'a plusieurs méthodes pour calculer le : $PPCM(3196;1156)$

Methode1 : Ecrire le produit de tous les facteurs
Premiers présents dans l'une ou dans l'autre de ces deux décompositions et élever ces facteurs à leur plus grande puissance

Donc : $PPCM(3196;1156) = 2^2\times17^2\times47 = 54332$

Methode2 : On a : $PGCD(3196;1156)\times PPCM(3196;1156) = 3196\times1156$

Donc : $PPCM(3196;1156) = \dfrac{3196\times1156}{PGCD(3196;1156)}$

Donc : $PPCM(3196;1156) = \dfrac{3196\times1156}{68} = 54332$

3) Pour obtenir un carré parfait il faut que la décomposition ne contienne que des facteurs qui ont des exposants pairs

On a : $104 = 2^{\boxed{3}}\times13^{\boxed{1}}$ Il faut donc multiplier par : $2\times13 = 26$

Et le carré parfait obtenu est 2704

4) Pour rendre la fraction $\dfrac{3196}{1156}$ irréductible on doit diviser le numérateur et le dénominateur par leur $PGCD = 68$

$\dfrac{3196}{1156} = \dfrac{3196\div68}{1156\div68} = \dfrac{47}{17}$

5) Calcul de : $\dfrac{41}{3196} + \dfrac{21}{1156}$ Il faut mettre les fractions au même dénominateur :

Le $PPCM(3196;1156)$ est par définition le plus petit multiple commun de ces nombres :

$\dfrac{41}{3196} + \dfrac{21}{1156} = \dfrac{41\times17}{3196\times17} + \dfrac{21\times47}{1156\times47} = \dfrac{697}{54332} + \dfrac{987}{54332}$

$\dfrac{41}{3196} + \dfrac{21}{1156} = \dfrac{697+987}{54332} = \dfrac{1984}{54332} = \dfrac{1984\div4}{54332\div4} = \dfrac{421}{13583}$

Exercice4 : 1) Déterminer la parité des nombres suivants : $A = 5^{2021} + 6^{2022}$; $B = 2n^2 + 6n + 120$; $C = 4n^2 + 2n + 5$; $D = (n+3)(n+4) + 2023$; $E = (n+2021) + (n+2022)$; $F = 5n^2 + n$.

2) a ; b et c trois nombres consécutifs déterminer la parité de : $a+b+c$ et $a\times c$

Correction :1) Le nombre $A = 5^{2021} + 6^{2022}$ est impair (somme de deux nombres de différente parité) :

Le nombre 5^{2021} est impair (produit de nombres impairs) et Le nombre 6^{2022} est pair (produit de nombres pairs) .

$B = 2n^2 + 6n + 120 = 2(n^2 + 3n + 60) = 2k$ avec : $k = n^2 + 3n + 60$

Donc : $B = 2n^2 + 6n + 120$ est pair.

$C = 4n^2 + 2n + 4 + 1 = 2(2n^2 + n + 2) + 1 = 2k + 1$ Avec : $k = 2n^2 + n + 2$

Donc : $C = 4n^2 + 2n + 5$ est impair.

Le nombre $D = (n+3)(n+4) + 5$ est impair car $(n+3)(n+4)$ est pair

(Produit de deux nombres consécutifs) et 2023 impair.
Le nombre $E=(n+2021)+(n+2022)$ est impair (somme de deux nombres consécutifs).

$F=5n^2+n=n^2+n+4n^2=n(n+1)+2\times 2n^2$

On a : $n(n+1)$ est pair (produit de deux nombres consécutifs) et $2\times 2n^2=2\times k$ est pair.

Donc : $F=5n^2+n$ est pair.
2)soient : a, b et c trois nombres consécutifs
a) Si a est pair alors a+b+c est impair
Si a est impair alors a+b+c est pair
b) Si a est pair alors c pair donc : ac est pair (produit de deux nombres de même parité).
Si a est impair alors c impair et donc : ac est impair (produit de deux nombres de même parité).

Exercice5 : Soit n et k deux entiers naturels.
1) Montrer que si $n=5k+2$ alors n^2+1 est divisible par 5.
2) Montrer que la somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.
3) Montrer que la somme de trois nombres pairs consécutifs est un multiple de 6.
4) Montrer que la somme de trois nombres impairs consécutifs est un multiple de 3.
5) n, m et k trois entiers naturels, montrer que si $3n+2m$ et $7n+5m$ sont deux multiples de k alors n est multiple de k

Correction : Soit n et k deux entiers naturels.
1) Supposons que si $n=5k+2$ alors : $n^2+1=(5k+2)^2-1=25k^2+20k+4+1=25k^2+20k+5$

$n^2+1=5(5k^2+4k+1)=5k'$ Avec : $k'=5k^2+4k+1\in\mathbb{N}$

Donc : n^2+1 divisible par 5.
2) n ; $n+1$, $n+2$, $n+3$ et $n+4$ sont cinq nombres entiers consécutifs et on a :
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(n+2)=5k$ Avec : $k=n+2\in\mathbb{N}$
Donc c'est un multiple de 5.
3) $2n$; $2n+2$ et $2n+4$ sont trois nombres pairs consécutifs et on a :
$(2n)+(2n+2)+(2n+4)=6n+6=6(n+1)$ donc c'est un multiple de 6.
4) $2n+1$; $2n+3$ et $2n+5$ sont trois nombres impairs consécutifs et on a :
$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=3(2n+3)$
Donc c'est un multiple de 3.
5) n ; m et k trois entiers naturels, supposons que : $3n+2m$ et $7n+5m$ sont deux multiples de k
Alors : $3n+2m=kp$ et $7n+5m=kp$
$15n+10m=5kp$
Donc : $15n+10m=5kp$ et $14n+10m=2kq$
Donc : $(15n+10m)-(14n+10m)=5kp-2kq$
Donc $n=k(5p-2q)$; Par suite : n est multiple de k .

Exercice6 : 1) Sans calculer les nombres suivants sont-ils premiers ?
$A=49\times 13+7$; $B=5\times 2\times 23+2022$; $C=11\times 45+44$
2) a) 19² est -il premier ? b) 317 est -il premier ?

Correction :1) $A=49\times 13+7$ n'est pas premier car divisible par 7
$B=5\times 2\times 23+2022$ n'est pas premier car divisible par 2
$C=11\times 45+44$ n'est pas premier car divisible par 13
2) a) 19² n'est pas premier car divisible par 19
b) les nombres premiers inférieurs a $\sqrt{317}$ sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 et Ils ne divisent pas 317 donc : 317 est premier.

Exercice7 : Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $A=5^{n+2}-5^n$; $B=3^{n+3}+3^n$
1) Décomposer A en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 6
2) Décomposer B en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 14
3) En déduire $A\wedge B$ et $A\vee B$

Correction :1) $A=5^{n+2}-5^{n}=5^{n}\times5^{2}-5^{n}=5^{n}\times\left(5^{2}-1\right)=5^{n}\times24=2^{3}\times3\times5^{n}$

La décomposition de A en produit de facteurs premiers est : $A=2^{3}\times3\times5^{n}$

$A=2^{3}\times3\times5^{n}=2\times3\times2^{2}\times5^{n}=6\times\left(2^{2}\times5^{n}\right)=6\times k$

Donc : A est divisible par 6

2) $B=3^{n+3}+3^{n}=3^{n}\times3^{3}+3^{n}=3^{n}\times\left(3^{3}+1\right)=3^{n}\times28=2^{2}\times3^{3}\times7\times3^{n}=2^{2}\times3^{n+3}\times7$

La décomposition de B en produit de facteurs premiers est : $B=2^{2}\times3^{n+3}\times7$

$B=2^{2}\times3^{n+3}\times7=14\times2\times3^{n+3}=14\times k$ Avec $k=2\times3^{n+3}$

Donc : B est divisible par 14

3) Déduction de : $A\wedge B$ et $A\vee B$.

On a trouvé : $A=2^{3}\times3\times5^{n}$ et $B=2^{2}\times3^{n+3}\times7$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de A et B

Donc : $A\wedge B=2^{2}\times3^{1}=12$ car $1\prec n+3$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs premiers communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de A et B

Donc : $A\vee B=2^{3}\times3^{n+3}\times5^{n}\times7=56\times3^{n+3}\times5^{n}=56\times3^{3}\times3^{n}\times5^{n}=1512\times15^{n}$

Exercice8 : (**) Soient : x ; y ; a et b des entiers naturels et soit $d\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : si d divise x et d divise y alors d divise $ax+by$ et d divise $ax-by$ $(ax\succ by)$

2) On pose : $x=5n+3$ et $y=7n-1$ avec $n\in\mathbb{N}$

Montrer que : tout diviseur de x et y est un diviseur de 26.

Correction :1) d divise x signifie que : $x=d\times k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Et d divise y signifie que : $y=d\times k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

Donc : $ax+by=a\times d\times k+b\times d\times k'$

Donc : $ax+by=d\left(a\times k+b\times k'\right)=d\times k''$ avec : $k''=a\times k+b\times k'\in\mathbb{N}$

De même : $ax-by=a\times d\times k-b\times d\times k'$

$ax-by=d\left(a\times k-b\times k'\right)=d\times k''$ avec : $k''=a\times k-b\times k'\in\mathbb{N}$

Par conséquent : d divise $ax+by$ et d divise $ax-by$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $x=5n+3$ et $y=7n-1$

Et soit d un diviseur de x et y alors d'après la question 1) d est aussi diviseur de : $7x-5y$

Donc : d divise : $7(5n+3)-5(7n-1)$ c'est-à-dire : d divise : $35n+21-35n+5$

Donc : d divise : 26 et par suite : tout diviseur de x et y est un diviseur de 26

Exercice9 : (**) Soient : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ et on pose : $N=(n+4m)^{2}-n^{2}$

Montrer que : N est un entier naturel divisible par 8

Correction :1) $N=(n+4m)^{2}-n^{2}=(n+4m+n)(n+4m-n)=8m(n+2m)$

Puisque : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$ alors : $8m(n+2m)\in\mathbb{N}$ et par suite : $N\in\mathbb{N}$

Et on a : $N=8m(n+2m)=8k$ avec : $k=m(n+2m)\in\mathbb{N}$

Par suite : N est un entier naturel divisible par 8

Exercice10 : (***) Soit $n\in\mathbb{N}^{*}$

1) Montrer que : $n^{2}+3n+4$ et $n^{2}-3n+4$ sont des nombres pairs.

2) Montrer que : le nombre $n^{4}-n^{2}+16$ est un multiple de 4

Correction :1) a) on a : $n^{2}+3n+4=n^{2}+n+2n+4=n(n+1)+2(n+2)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

$2(n+2)=2k$ Avec $k=n+2\in\mathbb{N}$ est aussi pair

Par suite le nombre $n^2+3n+4=n(n+1)+2(n+2)$ est pair car c'est la somme deux nombres pairs

b) On a : $n^2-3n+4=n^2+n-4n+4=n(n+1)-2(2n-2)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

$2(2n-2)=2k$ Avec $k=2n-2\in\mathbb{N}$ est aussi pair.

Par suite le nombre $n^2+3n+4=n(n+1)-2(n-2)$ est pair car c'est la différence de deux nombres pairs.

2) ***1ere méthode*** : On a : n^2+3n+4 et n^2-3n+4 sont des nombres pairs

Donc : $n^2+3n+4=2k$ et $n^2-3n+4=2k'$ avec : $k\in\mathbb{N}$ et $k'\in\mathbb{N}$

Par suite : $(n^2+3n+4)(n^2-3n+4)=(2k)(2k')=4kk'$

Équivaut à : $((n^2+4)+3n)((n^2+4)-3n)=4kk'$

Équivaut à : $(n^2+4)^2-9n^2=4kk'$

Équivaut à : $n^4+8n^2+16-9n^2=4kk'$

Équivaut à : $n^4-n^2+16=4kk'=4k''$ avec : $k''=kk'\in\mathbb{N}$

Équivaut à dire que n^4-n^2+16 est un multiple de 4.

2ere méthode : On a : $n^4-n^2+16=n^2(n^2-1)+16=n^2(n^2-1^2)+16$

$n^4-n^2+16=n^2(n-1)(n+1)+16=(n-1)n\times n\times(n+1)+16$

Or : on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair

Et aussi : $(n-1)\times n$ est le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est un nombre pair.

$n^4-n^2+16=2k\times 2k'+16=4kk'+16=4(kk'+4)=4k''$ Avec : $k''=kk'+4\in\mathbb{N}$

Par suite : n^4-n^2+16 est un multiple de 4

Exercice11 : (***) :

Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $x^2-y^2=51$ (1)

Correction :1) $x^2-y^2=51$ Équivaut a $(x+y)(x-y)=51$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 51

On a : $51=3^1\times 17^1$ donc les diviseurs de 51 sont : 1 et 3 et 17et 51

Par suite : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=51 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=17 \end{cases}$ car $x-y\prec x+y$

Donc : $\begin{cases} x=26 \\ y=25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=10 \\ y=7 \end{cases}$ Par suite : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont : $(26;25)$ **;** $(10;7)$

Exercice12 : (***) Soient n et a deux entiers naturels non nuls. On pose: $S=(a+1)+(a+2)+....(a+n)$

1) Montrer que : $1+2+3+....+(n-2)+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2) Montrer que n divise le nombre $S-\dfrac{n(n+1)}{2}$

3) Montrer que si n est impair alors S est divisible par n .

Correction :1) Montrons que : $1+2+3+....+(n-2)+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

On pose : $A=1+2+3+....+(n-2)+(n-1)+n$ (1)

On a aussi $A=n+(n-1)+(n-2)+...+2+1$ (2)

Donc : (1) + (2) donne : $2A=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+....+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n\ fois}$

Donc : $2A = n(n+1)$ par suite : $A = \frac{n(n+1)}{2}$

2) Montrons que n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$

$$S - \frac{n(n+1)}{2} = (a+1)+(a+2)+....(a+n) - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S - \frac{n(n+1)}{2} = \underbrace{a+a+...a}_{n\ fois} + (1+2+3+...+n) - \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc : $S - \frac{n(n+1)}{2} = na + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = na$

Donc : n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$

3) Montrons que si n est impair alors S est divisible par n :
Supposons que : n est impair alors : $n = 2k+1$ Avec : $k \in \mathbb{N}$

On a : $S - \frac{n(n+1)}{2} = na$ donc : $S = na + \frac{n(n+1)}{2}$ par suite : $S = (2k+1)a + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}$

Donc : $S = (2k+1)a + (2k+1)(k+1)$

Donc : $S = (2k+1)(a+k+1) = n(a+k+1) = n \times k'$ Avec : $k' \in \mathbb{N}$

Donc : S est divisible par n

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien