

Tronc commun Sciences BIOF
Correction Série N°1 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : \in ; \notin ; \subset ; $\not\subset$

$-4 \dots \mathbb{N}$; $\frac{2}{3} \dots \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \dots \mathbb{N}$; $\frac{8}{2} \dots \mathbb{N}$; $-\frac{15}{3} \dots \mathbb{N}$; $12-32 \dots \mathbb{N}$; $\sqrt{25} \dots \mathbb{N}$; $2,12 \dots \mathbb{N}$; $0 \dots \mathbb{N}^*$; $-\frac{\sqrt{100}}{3} \dots \mathbb{N}$
 $\pi \dots \mathbb{N}$; $\{1;2;7\} \dots \mathbb{N}$; $\{4;-2;12\} \dots \mathbb{N}$; $\mathbb{N}^* \dots \mathbb{N}$; $\{0\} \dots \mathbb{N}$; $10 \dots \{1;8;9;11;12\}$; $5 \dots \emptyset$

Correction : $-4 \notin \mathbb{N}$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$; $\frac{8}{2} \in \mathbb{N}$; $-\frac{15}{3} \notin \mathbb{N}$; $12-32 \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; $2,12 \notin \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}^*$; $\frac{\sqrt{100}}{2} \in \mathbb{N}$;
 $\pi \notin \mathbb{N}$; $\{1;2;7\} \subset \mathbb{N}$; $\{4;-2;12\} \not\subset \mathbb{N}$; $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$; $\{0\} \subset \mathbb{N}$; $10 \notin \{1;8;9;11;12\}$; $5 \notin \emptyset$

Exercice2 : (*) Déterminer les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59

Correction : Soit a et b deux entiers. On dit que : a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que a = k b.
On dit alors que b est un diviseur de a.

Les multiples de 9 s'écrivent sous la forme : $9k$ avec : $k \in \mathbb{N}$

On a donc : $23 \leq 9k \leq 59$ Signifie que : $23/9 \leq k \leq 59/9$

Signifie que : $2.5 \leq k \leq 6.5$ donc : $k \in \{3;4;5;6\}$

Par suite : les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59 sont : 9×3 ; 9×4 ; 9×5 ; 9×6

C'est à dire : 27 ; 36 ; 45 ; 54

Exercice3 : (*)1) a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 72

b) Déterminer le nombre de diviseurs de 72.

c) Déterminer les diviseurs de 72

2) a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 60

b) Déterminer le nombre de diviseurs de 60.

c) Déterminer les diviseurs de 60

3) a) Déterminer tous les diviseurs communs à 72 et 60

b) Déterminer le : PGCD (72 ; 60)

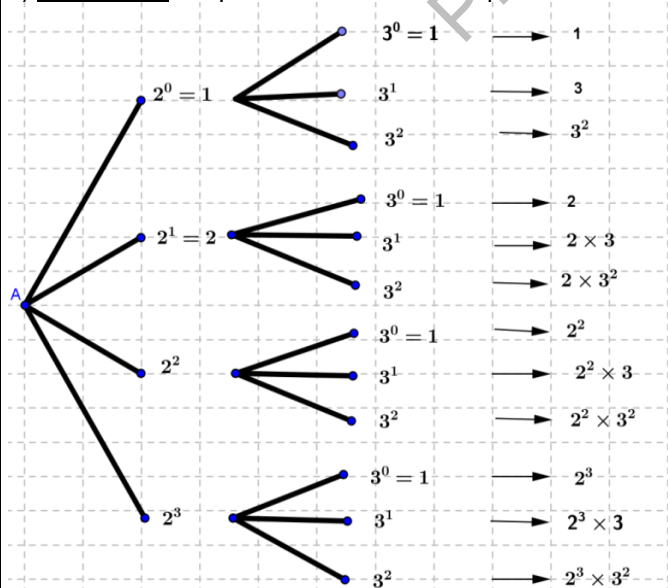
4) a) Déterminer trois multiples communs à 72 et 60

b) Déterminer le : PPCM (72 ; 60)

Correction : 1) a) La décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel 72 est : $72 = 2^3 \times 3^2$

b) Il y a : $(3 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$ diviseurs

c) Methode1 : On peut s'aider d'un arbre pour lister ces diviseurs :



Donc : les diviseurs de 72 sont : 1 ; 3 ; 9 ; 2 ; 6 ; 18 ; 4 ; 12 ; 36 ; 8 ; 24 ; 72

Methode2 : On utilise les critères de divisibilités : On a : $\sqrt{72} = 8,48 \dots$ On prend : 9

Nous déterminons les nombres inférieurs ou égaux à 9 qui sont des diviseurs de 72
Qui sont : 1 ; 2 ; 4 ; 3 ; 6 ; 9 après on divise 72 par 1 on trouve 72 et on divise 72 par 2 on trouve 36
Et on divise 72 par 3 on trouve 24

Nous obtenons ainsi les diviseurs suivants de : 1 ; 3 ; 9 ; 2 ; 6 ; 18 ; 4 ; 12 ; 36 ; 8 ; 24 ; 72

2) a) La décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel 60 est : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

b) Il y a : $(2+1) \times (3+1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs

c) les diviseurs de 60 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 2 ; 6 ; 10 ; 4 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60

3) a) Les diviseurs communs à 72 et 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

b) Le PGCD (72 ; 60) : est le plus grand diviseur commun de 72 et 60

Le PGCD : « Le plus grand diviseur commun des deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »

Donc : PGCD (72 ; 60) = $2^2 \times 3$

Remarque : les diviseurs de 12 sont aussi les diviseurs communs de 72 et 60

4) a) Déterminer deux multiples communs à 72 et 60

Les multiples de 60 sont : 0 ; 60 ; 120 ; 180 ; 240 ; 300 ; 360 ; ...

Les multiples de 72 sont : 0 ; 72 ; 144 ; 216 ; 288 ; 360 ; 432 ; ...

Deux multiples communs à 72 et 60 sont : 0 ; 360

b) le : PPCM (72 ; 60) = 360

Exercice 4 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

1) $375^2 + 648^2$ 2) $(25^3 + 24^3)^7$ 3) $2n+16$ 4) $10n+5$ 5) $n^2 + 11n + 17$ 6) $n^2 + 7n + 20$

7) $n^2 + 13n + 17$ 8) $5n^2 + 7n + 4$.

Correction : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

1) $375^2 + 648^2$: 648^2 est paire car le carré d'un nombre pair.

375^2 est impair car le carré d'un nombre impair.

$375^2 + 648^2$ C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

2) 24^3 est paire car le produit de nombres pairs et 25^3 est impair car le produit de nombres impairs

Donc : $25^3 + 24^3$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair

Et par suite : $(25^3 + 24^3)^7$ est impair car le produit de nombres impairs.

3) $2n + 16 = 2(n + 8) = 2 \times k$ avec $k = n + 8 \in \mathbb{N}$

Et par suite : $2n + 16$ est un nombre pair.

4) $10n + 5 = 2(5n + 2) + 1 = 2 \times k + 1$ avec $k = 5n + 2 \in \mathbb{N}$

Par suite : $10n + 5$ est un nombre impair.

5) On a : $n^2 + 11n + 17 = n^2 + n + 10n + 16 + 1$ $n^2 + 11n + 17 = n(n+1) + 2(5n+8) + 1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Donc : $n^2 + 11n + 17 = 2k + 2(5n+8) + 1$

Donc : $n^2 + 11n + 17 = 2(k + 5n + 8) + 1 = 2k' + 1$ Avec $k' = k + 5n + 8$

Par suite : $n^2 + 11n + 17$ est un nombre impair.

6) On a : $n^2 + 7n + 20 = n^2 + n + 6n + 20 = n(n+1) + 2(3n+10)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

$n^2 + 7n + 20 = 2k + 2(3n+10) = 2(k + 3n + 10) = 2k'$ Avec $k' = k + 3n + 10$

Donc $n^2 + 7n + 20$ est un nombre pair.

7) Etude de la parité de $n^2 + 13n + 17$:

$n^2 + 13n + 17 = n^2 + n + 12n + 16 + 1$ $n^2 + 13n + 17 = n(n+1) + 2(6n+8) + 1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Par suite : $n^2 + 13n + 17 = 2k + 2k' + 1 = 2(k+k') + 1 = 2k'' + 1$ avec : $k'' = k + k' \in \mathbb{N}$

Donc $n^2 + 13n + 17$ est un nombre impair

8) Etude de la parité de $5n^2 + 7n + 4$: $5n^2 + 7n + 4 = 5n^2 + 5n + 2n + 4 = 5n(n+1) + 2(n+2)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Par suite : $5n^2 + 7n + 4 = 5 \times 2k + 2k' = 2(5k + k') = 2k''$ Avec : $k' = n + 2 \in \mathbb{N}$ et $k'' = 5k + k' \in \mathbb{N}$

Donc $5n^2 + 7n + 4$ est un nombre pair

Exercice5 : (***) Soit n est un nombre entier naturel impair

1) Vérifier que : $n^2 - 1$ est un multiple de 8 dans cas suivants : $n = 1$; $n = 3$; $n = 5$; $n = 7$

2) Montrer que : $n^2 - 1$ est un multiple de 4

3) Montrer que : $n^2 - 1$ est un multiple de 8

4) En déduire que : $n^4 - 1$ est un multiple de 16

5) Montrer que si n et m sont impairs alors : $n^2 + m^2 + 6$ est un multiple de 8

Correction : 1) si $n=1$ alors $1^2 - 1 = 0$ est un multiple de 8

Si $n=3$ alors : $3^2 - 1 = 8$ est un multiple de 8

Si $n=5$ alors $5^2 - 1 = 24$ est un multiple de 8

Si $n=7$ alors : $7^2 - 1 = 48$ est un multiple de 8

2) n est impair donc : $n = 2k + 1$.

Donc : $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + (1)^2 - 1$

$n^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k) = 4 \times k'$ Avec $k' = k^2 + k \in \mathbb{N}$

Donc : $n^2 - 1$ est un multiple de 4.

3) On a trouvé : $n^2 - 1 = 4k(k+1)$ or $k(k+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : $k(k+1) = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$

Donc : $n^2 - 1 = 8k'$ et par suite : $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

4) $n^4 - 1 = (n^2)^2 - 1^2 = (n^2 - 1)(n^2 + 1)$.

Et on a trouvé que : $n^2 - 1 = 4k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$.

Et on a : $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$

$n^2 + 1 = 4(k^2 + k + 1) = 4 \times k''$

Donc : $n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (4k')(4k'') = 16k'''$ avec : $k''' = k'k'' \in \mathbb{N}$

Donc : $n^4 - 1$ est un multiple de 16.

5) On a trouvé que : $n^2 - 1$ est un multiple de 8

Donc : $n^2 - 1 = 8k$ c'est-à-dire : $n^2 = 8k + 1$ de même on a : $m^2 - 1$ est un multiple de 8

Donc : $m^2 - 1 = 8k'$ c'est-à-dire : $m^2 = 8k' + 1$

$n^2 + m^2 + 6 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 6 = 8k + 8k' + 8$

$n^2 + m^2 + 6 = 8(k + k' + 1) = 8k''$ Avec : $k'' = k + k' + 1 \in \mathbb{N}$

Par conséquent : $n^2 + m^2 + 6$ est un multiple de 8.

Exercice6 : (**) Soient : $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n - 1$ soit un multiple de 3.

Montrer que : $n^2 - 1$ est un entier naturel multiple de 3.

Correction : On a : $n - 1$ soit un multiple de 3

Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n - 1 = 3k$ c'est-à-dire : $n = 3k + 1$

Donc : $n^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 9k^2 + 6k$ $n^2 - 1 = 3(3k^2 + 2k) = 3k'$ avec : $k' = 3k^2 + 2k \in \mathbb{N}$

Par suite : $n^2 - 1$ est un entier naturel multiple de 3

Exercice7 : (*) Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.

0 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191 ; 1004001 et 259

Correction : Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont : 1 et lui-même.

1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divisent 0

17 est premier car admet exactement deux diviseurs

21 n'est pas premier car 3 divise 21 ($21 = 7 \times 3$)

41 est premier car admet exactement deux diviseurs

87 n'est pas premier car 3 divise 87 ($87 = 29 \times 3$)

105 n'est pas premier car 5 divise 105 ($105 = 5 \times 21$)

Question : Est-ce que 239 est premier ?

On utilise la règle suivante : « Pour montrer qu'un nombre est premier il suffit de vérifier qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p inférieur à sa racine carrée »

Donc on cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 239$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239 et par conséquent : 239 est premier

2787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 24 qui est multiple de 3 donc 3 divise 2787

3) Est-ce que 191 est premier ? On utilise la règle : On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 191$

Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 191. Par conséquent : 191 est premier

1004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 6 qui est un multiple de 3 donc 3 divise 1004001

259 n'est pas premier car $259 = 7 \times 37$ c'est à dire 7 divise 259.

Exercice8 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ on pose : $A = 7^{n+2} - 7^n$; $B = 2^{n+3} + 2^n$

1) Décomposer A en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 12

2) Décomposer B en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 9

3) En déduire $A \wedge B$ et $A \vee B$

Correction : 1) $A = 7^{n+2} - 7^n = 7^n \times 7^2 - 7^n = 7^n \times (7^2 - 1) = 7^n \times 48 = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$

La décomposition de A en produit de facteurs premiers est : $A = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$

$A = 2^4 \times 3^1 \times 7^n = 2^2 \times 3 \times 2^2 \times 7^n = 12 \times (2^2 \times 7^n) = 12 \times k$ avec $k = 2^2 \times 7^n$

Donc : A est divisible par 12

2) $B = 2^{n+3} + 2^n = 2^n \times 2^3 + 2^n = 2^n \times (2^3 + 1) = 2^n \times 9 = 2^n \times 3^2$

La décomposition de B en produit de facteurs premiers est : $B = 2^n \times 3^2$

$B = 2^n \times 9 = 9 \times k$ Avec $k = 2^n$ Donc : B est divisible par 9

3) Dédution de : $A \wedge B$ et $A \vee B$.

On a trouvé : $A = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$ et $B = 2^n \times 3^2$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de A et B

Donc : $A \wedge B = 2^4 \times 3^1 = 48$ car $n \geq 4$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs premiers communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de A et B

Donc : $A \vee B = 2^n \times 3^2 \times 7^n = 9 \times 14^n$

Exercice9 : Déterminer tous les couples $(x; y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :

$x^2 - y^2 = 17$ **Correction :** 1) $x^2 - y^2 = 17$ Équivaut à $(x + y)(x - y) = 17$

Donc : $x + y$ et $x - y$ sont des diviseurs de 17

On a : $17 = 1 \times 17$ donc les diviseurs de 17 sont : 1 et 17

Par suite : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 17 \end{cases}$ car $x - y < x + y$ Donc : $\begin{cases} 2x = 18 \\ x + y = 17 \end{cases}$ **cad :** $\begin{cases} x = 9 \\ x + y = 17 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x = 9 \\ y = 17 - 9 = 8 \end{cases}$

Par suite : le couple $(x; y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation est : (9;8)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

