Congruences : série 2

Exercice 1

1. Déterminer le plus petit entier k réalisant l'équivalence :
   $6^k \equiv 0 \pmod{4}$

2. Pour tout entier naturel a, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la congruence ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul :
   $(a+6)^n \equiv a^n + 6 \cdot n \cdot a^{n-1} \pmod{4}$

Exercice 2

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2\,009$ par 11.

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009} + 2\,009$ par 11.

Exercice 3*

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = 5 \cdot u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel :
   $2 \cdot u_n = 5^{n+2} + 3$

2. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $2 \cdot u_n$ est un multiple de 4.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $2 \cdot u_n \equiv 28 \pmod{100}$

Exercice 4*

Un entier naturel N s'écrit $\overline{cabc}$ dans e système de numération à base cinq où a, b, c sont non nuls, c'est-à-dire :
$N = c \times 5^3 + a \times 5^2 + b \times 5 + c$
où a, b, c sont des entiers tels que :
$0 < a < 5 \quad ; \quad 0 < b < 5 \quad ; \quad 0 < c < 5$

Ce même nombre N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération à base huit.

1. Montrer que $N = 65a + 8b$ et en déduire que :
   $40a = 126c - 3b$.

2. a. Justifier que : $40a \equiv 0 \pmod{3}$.
   En déduire la valeur de a.

   b. Montrer que : $b \equiv 0 \pmod{2}$.
   Déterminer les valeurs de b et c.

   c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

Exercice 5*

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.
On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté "$\star$" considéré comme un caractère.
Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

Premièrement : on associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant. On a donc :
$a \longmapsto 0 \quad ; \quad b \longmapsto 1 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad z \longmapsto 25.$
On associe au séparateur "$\star$" le nombre 26.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	$\star$
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

On dit que a a pour rang 0, b a pour rang $1, \ldots$, z a pour rang 25 et le séparateur "$\star$" a pour rang 26.

Deuxièmement : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x+3$ par 27.